ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

1984

DURÉE : 3 HEURES

On considère une succession d'épreuves aléatoires indépendantes, chaque épreuve n'ayant que deux issues incompatibles : "succès" (S) ou "échec" (E). On note p $(0 < p < 1)$ la probabilité de succès à une épreuve et $q = 1-p$.

On appelle "séquence de succès de longueur r" toute suite ininterrompue de r succès consécutifs. Le but du problème est d'étudier la variable aléatoire T égale au nombre d'épreuves précédant la première séquence de succès de longueur 3 . La suite d'épreuves s'arrête alors au 3e succès de cette séquence. Par exemple l'événement élémentaire (SSESSS) appartient à l'événement $(T = 3)$. On admettra que T est une variable aléatoire bien définie.

On notera, pour k entier, $t_k = P(T = k)$.

I

1° - Calculer les probabilités t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , t_5 .

2° - Appelons q_n la probabilité de l'événement A_n : "n'obtenir aucune séquence de succès de longueur 3 dans une suite de n épreuves". Montrer que t_n peut s'exprimer au moyen de q_{n-1} .

3° - Montrer que l'événement A_n ne peut commencer que par les trois possibilités : (E....) , (SE....) , (SSE....) . En déduire une formule de récurrence exprimant q_n en fonction de q_{n-1} , q_{n-2} , q_{n-3} , pour $n \geqslant 3$. (On est amené à poser $q_0 = 1$) .

Calculer les nombres q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , q_5 . Vérifier en utilisant 1°) et 2°).

4° - Etudier la monotonie de la suite $(n \longmapsto q_n)$. Quelle est la valeur la plus probable de T ?

Soit F la fonction définie par $F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n s^n$, lorsque cette série converge.

1° - Montrer que, si $|s|<1$, alors F(s) est défini.

2° - En partant de la relation de récurrence trouvée au I.3°, vérifier que F(s) peut s'exprimer par la formule :

$$F(s) = \frac{1+ps+p^2s^2}{1-qs(1+ps+p^2s^2)}$$

3° - Etudier les variations, pour s réel, de la fonction $s \longmapsto Q(s) = 1 - qs(1+ps+p^2s^2)$ Montrer que Q admet une seule racine réelle x_0, et que $x_0 > 1$.

Soit α une racine complexe de Q , différente de x_0 . Démontrer que $x_0 < |\alpha|$. (Remarquer que, si $|s| \leqslant x_0$, alors $|qs(1+ps+p^2s^2)| \leqslant 1$; et examiner dans quels cas il y a égalité).

Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n s^n$?

4° - Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n$ converge. Calculer la somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} t_k$.

Comment interpréter cette valeur ?

5° - Calculer le nombre $F'(1)$. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T , E(T) . Etudier la fonction : $p \longmapsto E(T)$.
Donner la valeur numérique de E(T) dans les 3 cas : $p = 0,1$; $p = 0,5$; $p = 0,9$.

III

On cherche dans cette partie une évaluation de q_n , quand n tend vers $+\infty$.

1° - Vérifier que $F(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)}$ où $P_1(s) = 1-p^3s^3$ et $Q_1(s) = 1-s+qp^3s^4$.

Montrer que, dans la décomposition de la fraction rationnelle F en éléments simples, la partie principale relative au pôle x_0 est égale à $\frac{A}{s-x_0}$ où, pour $p \neq \frac{3}{4}$, le nombre réel A est donné par $A = \frac{P_1(x_0)}{Q'_1(x_0)}$.

2° - En utilisant la décomposition de la fraction rationnelle F sur $\mathbb{C}$, montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $q_n \sim \frac{-A}{x_0^{n+1}}$.

3° - Application numérique : on suppose $p = \frac{1}{2}$. Le nombre réel x_0 est alors racine de l'équation : $x_0 = 1 + \frac{x_0^4}{16}$. Donner une valeur numérique approchée à 10^{-2} près des nombres x_0 et A . Dresser un tableau donnant les valeurs exactes des nombres q_k (pour $k = 3$, 4 , 5) ainsi que leurs valeurs approchées obtenues en utilisant l'équivalent du 2°) . Donner une évaluation des nombres q_{10} , q_{20} , q_{50} .
